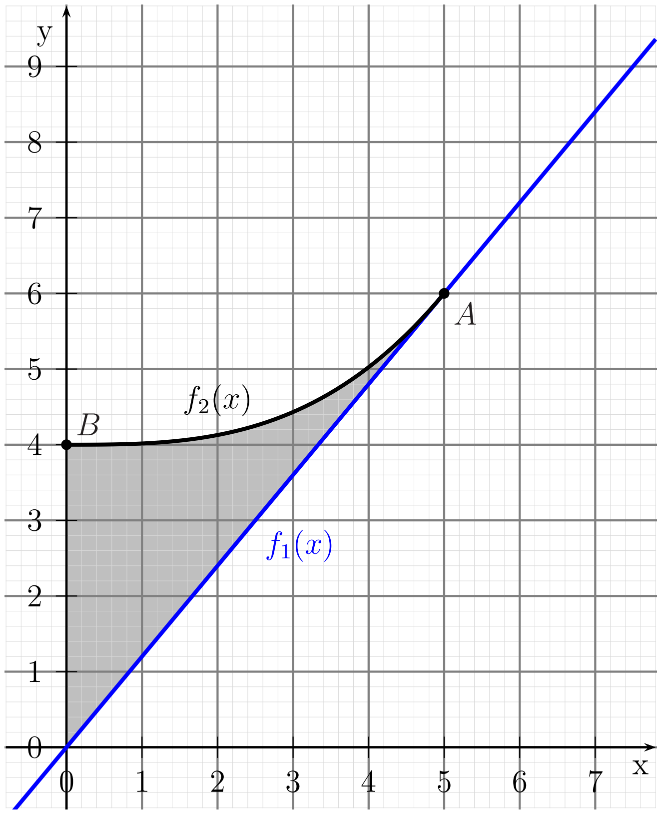
Aufgabe 12

An einen Berghang mit linearem Verlauf soll eine Ski-Sprungschanze gebaut werden. Der natürliche Berghang dient dabei als Anlaufstrecke.



Im unteren Teil biegt die Spur im Punkt **A** ohne Knick ab zum Schanzentisch im Punkt **B**. Das Kurvenstück, das den Hang mit dem Schanzentisch verbindet, stellt ein **Polynom dritten Grades** dar, wobei die Kurve auf der Kante des Schanzentisches im Punkt **B** einen Sattelpunkt hat.

Ein Koordinatensystem ist an den Hang angelegt, so dass der Koordinatenursprung genau senkrecht unter der Kante des Schanzentisches auf dem natürlichen Hang liegt. Der Schanzentisch bei Punkt **B** liegt eine **unbekannte** Höhe darüber. (**Achtung!** Sie können also **nicht** den aus der Skizze ablesbaren Wert als gegeben voraussetzen!)

Der Punkt **A**, bei dem das Kurvenstück ohne Knick in den natürlichen Hang einmündet, liegt bei **A**(**5m**|**6m**).

a): Bestimmen Sie die Lineare Funktion $f_1(x)$, die den Verlauf des Hanges darstellt!

b): Bestimmen Sie das Polynom dritten Grades $f_2(x)$, das den Verlauf des gebogenen Kurvenstückes darstellt!

c): Unter dem gebogenen Kurvenstück muss ein Unterbau aus Beton angefertigt werden. Wieviel m^3 Beton ist (ohne Berücksichtigung des Fundamentes) erforderlich, wenn der Unterbau 80 cm breit werden soll?

d): Wie groß ist die Steigung des gebogenen Kurvenstückes genau in seiner Mitte (waagerecht gemessen)?

Lösung:

Zur besseren Übersichtlichkeit erfolgen alle Berechnungen in der Einheit **Meter**. Die Einheiten lasse ich bei den Berechnungen weg.

a) Die allgemeine Geradengleichung lautet:

$$f_1(x) = mx + b$$

Der Graph der Gerade f_1 geht durch den Koordinatenursprung und den Punkt $A(5|6)$. Hieraus ergibt sich:

$$b = y_0 = 0$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-0}{5-0} = \frac{6}{5} = 1{,}2x$$

Damit lautet die Geradengleichung: $\boxed{f_1(x) = 1{,}2x}$

b) Die allgemeine Gleichung für ein Polynom 3. Grades lautet:

$$f_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die ersten beiden Ableitungen werden ebenfalls benötigt.

$$\begin{array}{rcl} f_1'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f_1''(x) & = & 6ax + 2b \end{array}$$

Nun können die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umgewandelt werden.

Bekannt ist der Punkt Punkt $A(5|6)$:

$$(1) \quad f_2(5) = 6 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 6$$

Bekannt ist auch die Steigung im Punkt $A(5|6)$:

$$(2) \quad f_2'(5) = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad 3a \cdot 5^2 + 2b \cdot 5 + c = \frac{6}{5}$$

Im Punkt $B(0|?)$ liegt ein Sattelpunkt. Das ergibt zwei Bedingungen:

$$\begin{array}{rrclcrcl} (3) & f_2'(0) & = & 0 & \Rightarrow & 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c & = & 0 \\ (4) & f_2''(0) & = & 0 & \Rightarrow & 6a \cdot 0 + 2b & = & 0 \end{array}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich sofort:

$$c = 0 \qquad \text{und} \qquad b = 0$$

Setzt man diese Werte in (1) und (2) ein, erhält man das Lineargleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} (1) & 125a \; +d & = & 6 \\ (2) & 75a & = & \frac{6}{5} \end{array}}$$

Aus Gleichung (2) kann a ausgerechnet werden.

$$\begin{aligned} 75a &= \frac{6}{5} \qquad \mid : 75 \\ a &= 0{,}016 \end{aligned}$$

Dieser Wert wird in (1) eingesetzt, um d zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 125a + d &= 6 \\ 125 \cdot 0{,}016 + d &= 6 \\ 2 + d &= 6 \quad \mid -2 \\ d &= 4 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_2(x) = 0{,}016x^3 + 4}$

c) Zur Berechnung des Volumens wird zunächst die in der gegebenen Skizze markierte Fläche A benötigt. Diese kann mit einem Integral berechnet werden, die Grenzen sind mit 0 und 5 ja schon bekannt.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 f_2(x) - f_1(x)\; dx \\ &= \int_0^5 0{,}016x^3 + 4 - 1{,}2x\; dx \\ &= \int_0^5 0{,}016x^3 - 1{,}2x + 4\; dx \\ &= \left[0{,}004x^4 - 0{,}6x^2 + 4x\right]_0^5 \\ &= \left(0{,}004 \cdot 5^4 - 0{,}6 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5\right) - \left(0{,}004 \cdot 0^4 - 0{,}6 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0\right) \\ A &= 7{,}5 \end{aligned}$$

Die Fläche beträgt also $7{,}5\,\mathrm{m}^2$. Bei der Berechnung des Volumens der Betonmauer muss noch die Mauerbreite berücksichtigt werden.

$$V = A \cdot b = 7{,}5\,\mathrm{m}^2 \cdot 80\,\mathrm{cm} = 7{,}5\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}^3$$

Das Stützwandvolumen beträgt: $\boxed{V = 6\,\mathrm{m}^3}$

d) Die Mitte zwischen 0 und 5 liegt bei 2,5. Die Steigung dort liefert die erste Ableitung von f_2.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0{,}016x^3 + 4 \\ f_2'(x) &= 0{,}048x^2 \\ f_2'(2{,}5) &= 0{,}048 \cdot 2{,}5^2 \\ f_2'(2{,}5) &= 0{,}3 \end{aligned}$$

Die Steigung in der Mitte des Kurvenstücks beträgt: $\boxed{m = 0{,}3}$