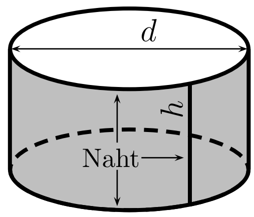
Aufgabe 11

Es sollen zylindrische Dosen mit Boden und Deckel für eine Volumen von $V = 1\,\text{Liter}$ hergestellt werden. (Siehe nebenstehende Skizze.) Wie groß sind der **Durchmesser d** und die **Höhe h** zu wählen, damit die gesamte Nahtlänge – bestehend aus der Bördelnaht an Deckel und Boden sowie einer Naht an der Dosenseite – möglichst klein wird?



Lösung:

Da die Nahtlänge optimiert werden soll, stellt diese auch die **Hauptbedingung** dar. Sie besteht aus zwei Kreisumfängen und einmal der Höhe.

$$\text{HB: } l = 2 \cdot \underbrace{\pi \cdot d}_{\text{Kreis}} + h$$

Die **Nebenbedingung** wird aus dem bekannten Volumen gewonnen.

$$\text{NB: } V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Es ist einfacher, die NB nach h umzustellen, als nach d. Anderenfalls erhielte man eine Wurzel.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \quad \left| \cdot \frac{4}{\pi \cdot d^2} \right. \\ \frac{4V}{\pi \cdot d^2} &= h \end{aligned}$$

Dieser Term für h wird in die HB eingesetzt. Anschließend wird die dabei entstandene Funktion noch etwas umgestellt (damit man sie bequemer ableiten kann), dann wird sie abgeleitet und $= 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned} l &= 2 \cdot \pi \cdot d + h \\ l(d) &= 2 \cdot \pi \cdot d + \frac{4V}{\pi \cdot d^2} \\ l(d) &= 2 \cdot \pi \cdot d + \frac{4V}{\pi} \cdot d^{-2} \\ l'(d) &= 2 \cdot \pi - \frac{8V}{\pi} \cdot d^{-3} \\ l'(d) &= 2 \cdot \pi - \frac{8V}{\pi \cdot d^3} \\ 0 &= 2 \cdot \pi - \frac{8V}{\pi \cdot d_E^3} && | \cdot \pi \cdot d_E^3 \\ 0 &= 2 \cdot \pi^2 \cdot d_E^3 - 8V && | - 2\pi^2 \cdot d_E^3 \\ -2\pi^2 \cdot d_E^3 &= -8V && | : (-2\pi^2) \\ d_E^3 &= \frac{8V}{2\pi^2} \\ d_E^3 &= \frac{4V}{\pi^2} && | \sqrt[3]{} \\ d_E &= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi^2}} \end{aligned}$$

Nun muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt. Dies kann beispielsweise mithilfe der zweiten Ableitung gemacht werden.

$$\begin{aligned} l'(d) &= 2 \cdot \pi - \frac{8V}{\pi} \cdot d^{-3} \\ l''(d) &= \frac{24V}{\pi} \cdot d^{-4} \\ l''(d) &= \frac{24V}{\pi \cdot d^4} \end{aligned}$$

Nun kann der gefundene Wert für d_E eingesetzt werden. Das führe ich aber nicht explizit durch. Folgende Überlegungen reichen aus:
Da d_E ein **positiver** Wert ist, ist auch d_E^2 positiv. Auch A und π sind positiv, also auch $l''(d_E) = \frac{24V}{\pi \cdot d_E^4}$. Da $l''(d_E) > 0$ ist, liegt – wie erhofft – bei $d_E = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi^2}}$ ein **Minimum** vor.
Was noch fehlt, ist die zugehörige Höhe h_E.

$$\begin{aligned} h_E &= \frac{4V}{\pi \cdot d_E^2} \\ &= \frac{4V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi^2}}\right)^2} \\ &= \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{4V}{\pi^2}\right)^2}} \\ &= \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{16V^2}{\pi^4}}} \\ &= \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3 \cdot 16V^2}{\pi^4}}} \\ &= \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{16V^2}{\pi}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{64V^3}{\frac{16V^2}{\pi}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{64V^3 \cdot \pi}{16V^2}} \\ h_E &= \sqrt[3]{4V \cdot \pi} \end{aligned}$$

Zum Schluss kann für das Volumen noch der gegebene Wert von 1 Liter eingesetzt werden. Damit erhält man dann: $\boxed{d_E \approx 0{,}74\,\mathrm{dm}}$ und $\boxed{h_E \approx 2{,}325\,\mathrm{dm}}$