Bestimmung von Ableitungen

W. Kippels

28. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: w.kippels@dokom.net

Vielen Dank!

2 Einleitung

Um Ableitungen einfach bestimmen zu können, sind genau **zwei** Dinge erforderlich:

1. Eine Sammlung grundlegender Funktionen und deren Ableitungen
2. Ableitungsregeln

3 Ableitungen von grundlegenden Funktionen

Genau fünf Funktionen reichen für (fast) alle Fuktionen als Grundlage aus. Hier sind sie zusammen mit ihren Ableitungen:

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} f(x) & = & x^n & \Rightarrow & f'(x) & = & n \cdot x^{n-1} \\ f(x) & = & \sin x & \Rightarrow & f'(x) & = & \cos x \\ f(x) & = & \cos x & \Rightarrow & f'(x) & = & -\sin x \\ f(x) & = & e^x & \Rightarrow & f'(x) & = & e^x \\ f(x) & = & \ln x & \Rightarrow & f'(x) & = & \frac{1}{x} \end{array}}$$

Als Spezialfall der ersten Funktion können noch folgende Funktionen angesehen werden:

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} f(x) & = & x & \Rightarrow & f'(x) & = & 1 \\ f(x) & = & k & \Rightarrow & f'(x) & = & 0 \end{array}}$$

Auf diese grundlegenden Funktonen können fast alle praktisch vorkommenden Funktionen zurückgeführt werden, wenn man die nachfolgenden Regeln kennt und anwenden kann.

4 Ableitungsregeln

Wenn man beliebige Funktionen ableiten möchte, dann benötigt man neben den Ableitungen von Grundfunktionen auch **Ableitungsregeln**. Diese werden im folgenden hier dargestellt.

4.1 Konstantenregel

Die Konstantenregel wird immer dann angewendet, wenn die abzuleitende Funktion dargestellt werden kann als das **Produkt aus einer Konstanten und einer bekannten Funktion**. Diese Regel wird von Schülern in der Regel intuitiv richtig angewendet. Sie besagt, dass man die Ableitung erhält, indem man die Ableitung der bekannten Funktion mit der Konstanten multipliziert. Die Konstantenregel stellt sich dann wie folgt dar:

Konstantenregel: $\boxed{f(x) = k \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k \cdot g'(x)}$

Beispiele:

$$\begin{aligned} f_1(x) = 3 \cdot x^5 \quad &\Rightarrow \quad f_1'(x) = 3 \cdot 5 \cdot x^4 = 15x^4 \\ f_2(x) = 5 \cdot \sin x \quad &\Rightarrow \quad f_2'(x) = 5 \cdot \cos x \\ f_3(x) = \pi \cdot e^x \quad &\Rightarrow \quad f_3'(x) = \pi \cdot e^x \end{aligned}$$

4.2 Summenregel

Immer dann wenn sich die Funktion darstellen lässt als **Summe zweier (oder mehrerer) bekannter Funktionen**, dann kann man die Summenregel anwenden. Auch diese Regel wird von Schülern in der Regel intuitiv richtig angewendet. Sie besagt, dass man jede Funktion einzeln ableiten kann und die Teilableitungen einfach hinterher addiert. Hier folgt die Summenregel als Formel:

Summenregel: $\boxed{f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)}$

Beispiele:

$$\begin{aligned} f_1(x) = x^4 + x^3 \quad &\Rightarrow \quad f_1'(x) = 4x^3 + 3x^2 \\ f_2(x) = \sin x + \cos x \quad &\Rightarrow \quad f_2'(x) = \cos x - \sin x \\ f_3(x) = x + 2 \quad &\Rightarrow \quad f_3'(x) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Natürlich können die Regeln auch kombiniert werden. Hier ein paar Beispiele dazu:

$$\begin{aligned} f_4(x) = 3x^2 + 5x \quad &\Rightarrow \quad f_4'(x) = 3 \cdot 2x + 5 = 6x + 5 \\ f_5(x) = 3x^5 - 4x^3 + 10x \quad &\Rightarrow \quad 3 \cdot 5x^4 - 4 \cdot 3x^2 + 10 = 15x^4 - 12x^2 + 10 \\ f_6(x) = 10e^x - 5\sin x \quad &\Rightarrow \quad f_6'(x) = 10e^x - 5\cos x \end{aligned}$$

4.3 Produktregel

Wie der Name schon sagt, wird die Produktregel angewendet, wenn die gesuchte Funktion darstellbar ist als **Produkt zweier bekannter** Funktionen.

Aufgepasst: Da diese Regel nicht so simpel ist, wird sie gern falsch angewendet!

Hier ist die Regel:

Produktregel: $\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$

Da die Regel nicht so einfach ist, schreibe ich bei den Beispielen jedes mal $u(x)$ und $v(x)$ sowie $u'(x)$ und $v'(x)$ auf, bevor die Lösung angegeben wird.

Beispiel 1:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x^2+3x)\cdot(2x-1) \\ \hline u(x)=x^2+3x & \Rightarrow & u'(x)=2x+3 \\ v(x)=2x-1 & \Rightarrow & v'(x)=2 \\ \hline f'(x) & = & (2x+3)\cdot(2x-1)+(x^2+3x)\cdot 2 \end{array}$$

Beispiel 2:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x\cdot\sin x \\ \hline u(x)=x & \Rightarrow & u'(x)=1 \\ v(x)=\sin x & \Rightarrow & v'(x)=\cos x \\ \hline f'(x) & = & 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x \end{array}$$

Beispiel 3:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x^2+1)\cdot\cos x \\ \hline u(x)=x^2+1 & \Rightarrow & u'(x)=2x \\ v(x)=\cos x & \Rightarrow & v'(x)=-\sin x \\ \hline f'(x) & = & 2x\cos x-(x^2+1)\cdot\sin x \end{array}$$

4.4 Quotientenregel

Natürlich kommt die Quotientenregel zum Einsatz, wenn die Funktion sich als **Quotient zweier bekannter Funktionen** (also als Bruch) schreiben lässt. Die Regel ist noch etwas „sperriger“ als die Produktregel, daher wieder die Warnung:

Die Quotientenregel wird noch häufiger, als die Produktregel falsch angewendet!

Die Regel lautet:

Quotientenregel: $\boxed{f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}}$

Da diese Regel ebenfalls nicht einfach ist, schreibe ich auch hier bei den Beispielen jedes mal $u(x)$ und $v(x)$ sowie $u'(x)$ und $v'(x)$ auf, bevor die Lösung angegeben wird.
Beispiel 1:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{2x+1}{3x-2} \\ \hline u(x)=2x+1 & \Rightarrow & u'(x)=2 \\ v(x)=3x-2 & \Rightarrow & v'(x)=3 \\ \hline f'(x) & = & \frac{2\cdot(3x-2)-(2x+1)\cdot 3}{(3x-2)^2} \end{array}$$

Beispiel 2:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{\sin x}{x} \\ \hline u(x) = \sin x & \Rightarrow & u'(x) = \cos x \\ v(x) = x & \Rightarrow & v'(x) = 1 \\ \hline f'(x) & = & \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} \end{array}$$

Beispiel 3:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \hline u(x) = \sin x & \Rightarrow & u'(x) = \cos x \\ v(x) = \cos x & \Rightarrow & v'(x) = -\sin x \\ \hline f'(x) & = & \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \end{array}$$

4.5 Kettenregel

Die letzte der 5 Regeln ist die Kettenregel. Diese Regel ist sehr mächtig, man muss aber erst lernen, damit umzugehen. Sie wird eingesetzt, wenn sich eine Funktion als **Funktion von einer Funktion** schreiben lässt. Verständlich wird das leider erst in Beispielen, aber hier kommt erst mal die Formel:

$$\textbf{Kettenregel:}\ \boxed{f(x) = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)}$$

An Beispielen möchte ich erklären, wie das zu verstehen ist.
Beispiel 1:

$$f(x) = \left(3x^2 - 2x\right)^3$$

Den Klammerausdruck $(3x^2 - 2x)$ kann ich als eigenständigen Term auffassen. Ich nenne ihn g. Da g von x abhängt, kann ich ihn auch als Funktion von x bezeichnen, also: $g(x) = 3x^2 - 2x$.

Andererseits hängt f von g ab. Ich könnte auch den kompletten Klammerausdruck – also g – als Variable betrachten. Dann ist f eine Funktion dieser Variablen g, also: $f(g) = g^3$. Da g selbst aber eine Funktion von x ist, ist damit f eine Funktion von einer Funktion von x. Verständlich? Nein? Schade.

Dann versuchen wir es anders herum. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen haben wir zwei Funktionen:

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & 3x^2 - 2x \\ f(g) & = & g^3 \end{array}$$

Im ersten Fall heißt die Variable (ganz normal) x, im zweiten Fall heißt sie g. Wenn ich $f(g)$ ableiten will, dann muss ich dabei die Variable g verwenden. Man sagt, man leitet

nach *g* ab. Bildet man nun diese Teilableitungen, dann kann man sie für die Kettenregel verwenden.

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & 3x^2 - 2x & \Rightarrow & g'(x) & = & 6x - 2 \\ f(g) & = & g^3 & \Rightarrow & f'(g) & = & 3g^2 \end{array}$$

Diese Ergebnisse setze ich in die Kettenregel ein und erhalte:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \left(3x^2 - 2x\right)^3 \\ f'(x) & = & f'(g) \cdot g'(x) \\ f'(x) & = & 3g^2 \cdot (6x - 2) \quad \mid g \text{ zurückersetzen} \\ f'(x) & = & 3 \cdot \left(3x^2 - 2x\right)^2 \cdot (6x - 2) \\ f'(x) & = & \left(3x^2 - 2x\right)^2 \cdot (18x - 6) \end{array}$$

Wir wollen das Verfahren an einem weiteren Beispiel anwenden.
Beispiel 2:

$$f(x) = e^{3x}$$

Die **innere Funktion**, die wir mit g benennen wollen, ist hier der Term $3x$. Damit stelle ich die Teilfunktionen und die Teilableitungen auf:

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & 3x & \Rightarrow & g'(x) & = & 3 \\ f(g) & = & e^g & \Rightarrow & f'(g) & = & e^g \end{array}$$

Die Ergebnisse setzen wir in die Kettenregel ein und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & e^{3x} \\ f'(x) & = & f'(g) \cdot g'(x) \\ f'(x) & = & e^g \cdot 3 \quad \mid g \text{ zurückersetzen} \\ f'(x) & = & 3 \cdot e^{3x} \end{array}$$

Noch ein Beispiel:
Beispiel 3:

$$f(x) = \cos(2x + 5)$$

Die **innere Funktion**, die wir mit g benennen wollen, ist hier der Term $(2x+5)$. Damit stelle ich die Teilfunktionen und die Teilableitungen auf:

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & 2x + 5 & \Rightarrow & g'(x) & = & 2 \\ f(g) & = & \cos g & \Rightarrow & f'(g) & = & -\sin g \end{array}$$

Die Ergebnisse setzen wir in die Kettenregel ein und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \cos(2x + 5) \\ f'(x) & = & f'(g) \cdot g'(x) \\ f'(x) & = & 2 \cdot (-\sin g) \\ f'(x) & = & -2\sin(2x + 5) \end{array}$$

Übungsaufgaben dazu sind hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ableit.pdf