Ableitungsübungen

W. Kippels

10. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Hier werden etliche Übungsaufgaben zum Erstellen von Ableitungen diverser Funktionen vorgestellt. Es soll jeweils die **erste** und die **zweite** Ableitung gebildet werden. Unter der **zweiten** Ableitung versteht man die Ableitung der (ersten) Ableitung. Man betrachtet also die zunächst bestimmte Ableitung als gegebene Funktion und leitet diese noch einmal ab.

Die notwendigen Grundlagen sind hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ablreg.pdf

2 Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die **erste** und die **zweite** Ableitung der nachfolgenden Funktionen!

2.1 Funktion 1

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 8x + 3$$

2.2 Funktion 2

$$f(x) = x + e^2$$

2.3 Funktion 3

$$f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 - 2x^2 - 15$$

2.4 Funktion 4

$$f(x) = x \cdot (x + 1)$$

2.5 Funktion 5

$$f(x) = (2x - 1) \cdot (1 - x)$$

2.6 Funktion 6

$$f(x) = (2x^2 - 1) \cdot (2x^2 + 1)$$

2.7 Funktion 7

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

2.8 Funktion 8

$$f(x) = 3 \cdot \sin x$$

2.9 Funktion 9

$$f(x) = \sin 3x$$

2.10 Funktion 10

$$f(x) = \sin^2 x$$

2.11 Funktion 11

$$f(x) = \sin^3 x$$

2.12 Funktion 12

$$f(x) = \sin^4 x$$

2.13 Funktion 13

$$f(x) = \sin x^2$$

2.14 Funktion 14

$$f(x) = \cos x^3$$

2.15 Funktion 15

$$f(x) = \sin 3x^4$$

2.16 Funktion 16

$$f(x) = e^{x+2}$$

2.17 Funktion 17

$$f(x) = e^{2x-1}$$

2.18 Funktion 18

$$f(x) = e^{\sin x}$$

2.19 Funktion 19

$$f(x) = e^{x^2-x}$$

2.20 Funktion 20

$$f(x) = 10^{2x+5}$$

2.21 Funktion 21

$$f(x) = e^{(3x+2)^2}$$

2.22 Funktion 22

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

2.23 Funktion 23

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

2.24 Funktion 24

$$f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{x^2-2x+1}$$

2.25 Funktion 25

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + \pi x - \pi^2$$

2.26 Funktion 26

$$f(x) = 2x^5 - 3e^2x^3$$

2.27 Funktion 27

$$f(x) = (2x+5) \cdot (3x-4)$$

2.28 Funktion 28

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

2.29 Funktion 29

$$f(x) = (x^2+3x) \cdot e^x$$

2.30 Funktion 30

$$f(x) = (\sqrt{x} - 2) \cdot e^x$$

2.31 Funktion 31

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

2.32 Funktion 32

$$f(x) = \frac{x \cdot e^x}{5x - 1}$$

2.33 Funktion 33

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

2.34 Funktion 34

$$f(x) = \sin x^4$$

2.35 Funktion 35

$$f(x) = 2e^{5x}$$

2.36 Funktion 36

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

3 Lösungen

3.1 Funktion 1

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 8x + 3$$

Die Ableitungen können mit der Summenregel und der Konstantenregel mit Hilfe der Potenzfunktion bestimmt werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x^1 - 8 \\ &= 12x^3 - 4x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12 \cdot 3x^2 - 4 \\ &= 36x^2 - 4 \end{aligned}$$

3.2 Funktion 2

$$f(x) = x + e^2$$

Die Ableitungen können mit der Summenregel und der Konstantenregel mit Hilfe der Potenzfunktion bestimmt werden. Zu bemerken ist allenfalls, dass $e \approx 2{,}718$ und damit auch $e^2 \approx 7{,}389$ eine **Konstante** ist und entsprechend behandelt wird.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ f''(x) &= 0 \end{aligned}$$

3.3 Funktion 3

$$f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 - 2x^2 - 15$$

Die Ableitungen können mit der Summenregel und der Konstantenregel mit Hilfe der Potenzfunktion bestimmt werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0{,}5 \cdot 4x^3 + 3x^2 - 2 \cdot 2x^1 \\ &= 2x^3 + 3x^2 - 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x^1 - 4 \\ &= 6x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

3.4 Funktion 4

$$f(x) = x \cdot (x + 1)$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1$
- $v(x) = x + 1 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 1 \cdot (x+1) + x \cdot 1 \\ &= x + 1 + x \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Die 2. Ableitung kann mit der Summenregel und der Konstantenregel mit Hilfe der Potenzfunktion bestimmt werden.

$$f''(x) = 2$$

Alternativ kann man die erste Ableitung auch ohne die Produktregel bestimmen, indem man zunächst bei $f(x)$ die Terme ausmultipliziert und danach mit Summen- und Konstantenregel weiter arbeitet.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (x+1) \\ &= x^2 + x \\ \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

3.5 Funktion 5

$$f(x) = (2x-1) \cdot (1-x)$$

Auch diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = 2x - 1 \Rightarrow u'(x) = 2$
- $v(x) = 1 - x \Rightarrow v'(x) = -1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2 \cdot (1-x) + (2x-1) \cdot (-1) \\ &= 2 - 2x - 2x + 1 \\ &= -4x + 3 \end{aligned}$$

Alternativ kann man die erste Ableitung auch ohne die Produktregel bestimmen, indem man zunächst bei $f(x)$ die Klammern ausmultipliziert und danach mit Summen- und Konstantenregel weiter arbeitet.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1) \cdot (1-x) \\ &= 2x - 2x^2 - 1 + x \\ &= -2x^2 + 3x - 1 \\ \\ f'(x) &= -2 \cdot 2x + 3 \\ &= -4x + 3 \end{aligned}$$

Die 2. Ableitung kann mit der Summenregel und der Konstantenregel mit Hilfe der Potenzfunktion bestimmt werden.

$$f''(x) = -4$$

3.6 Funktion 6

$$f(x) = (2x^2 - 1) \cdot (2x^2 + 1)$$

Auch diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow u'(x) = 4x$
- $v(x) = 2x^2 + 1 \Rightarrow v'(x) = 4x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 4x \cdot (2x^2 + 1) + (2x^2 - 1) \cdot 4x \\ &= 8x^3 + 4x + 8x^3 - 4x \\ &= 16x^3 \end{aligned}$$

Alternativ kann man die erste Ableitung auch ohne die Produktregel bestimmen, indem man zunächst bei $f(x)$ die Klammern ausmultipliziert und danach mit Summen- und Konstantenregel weiter arbeitet.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 1) \cdot (2x^2 + 1) \\ &= 4x^4 + 2x^2 - 2x^2 - 1 \\ &= 4x^4 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot 4x^3 \\ &= 16x^3 \end{aligned}$$

Die 2. Ableitung kann mit der Konstantenregel und mit Hilfe der Potenzfunktion bestimmt werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 16 \cdot 3x^2 \\ &= 48x^2 \end{aligned}$$

3.7 Funktion 7

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

Die Ableitungen können mit der Summenregel bestimmt wrden.

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$

3.8 Funktion 8

$$f(x) = 3 \cdot \sin x$$

Die Ableitungen können mit der Konstantenregel bestimmt werden.

$$f'(x) = 3 \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3 \cdot (-\sin x) \\ &= -3 \cdot \sin x \end{aligned}$$

3.9 Funktion 9

$$f(x) = \sin 3x$$

Hier haben wir die Funktion von einer Funktion. Daher kommt die Kettenregel zum Einsatz.

- $g(x) = 3x \Rightarrow g'(x) = 3$
- $f(g) = \sin g \Rightarrow f'(g) = \cos g$

Jetzt kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\ &= (\cos g) \cdot 3 \\ &= (\cos 3x) \cdot 3 \\ f'(x) &= 3 \cdot \cos 3x \end{aligned}$$

Auch für die zweite Ableitung ist die Kettenregel erforderlich.

- $g(x) = 3x \Rightarrow g'(x) = 3$
- $f(g) = 3 \cdot \cos g \Rightarrow f'(g) = -3 \cdot \sin g$

Hiermit kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\ &= (-3 \cdot \sin g) \cdot 3 \\ &= (-3 \cdot \sin 3x) \cdot 3 \\ f''(x) &= -9 \cdot \sin 3x \end{aligned}$$

3.10 Funktion 10

$$f(x) = \sin^2 x$$

Auf den ersten Blick ist dies fast das gleiche, wie bei Funktion 9. Tatsächlich muss aber hier zuerst der Sinuswert bestimmt werden, bevor die zweite Potenz gebildet wird. Daher ist jetzt die Sinusfunktion die innere Funktion.

- $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$
- $f(g) = g^2 \Rightarrow f'(g) = 2g$

Hiermit kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\ &= 2g \cdot \cos x \\ f'(x) &= 2 \cdot (\sin x) \cdot \cos x \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung kommt die Produktregel zum Einsatz.

- $u(x) = 2\sin x \Rightarrow u'(x) = 2\cos x$
- $v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$

Die Produktregel kann angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2 \cdot (\cos x) \cdot \cos x + 2 \cdot (\sin x) \cdot (-\sin x) \\ &= 2 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin^2 x \end{aligned}$$

3.11 Funktion 11

$$f(x) = \sin^3 x$$

Auch hier muss die Kettenregel angewendet werden. Dabei ist die Sinusfunktion die innere Funktion.

- $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$
- $f(g) = g^3 \Rightarrow f'(g) = 3g^2$

Hiermit kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\ &= 3g^2 \cdot \cos x \\ f'(x) &= 3\sin^2 x \cdot \cos x \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung kommt wie zuvor die Produktregel zum Einsatz. Ebenso benötigen wir bei der Bestimmung von $u'(x)$ in der Nebenrechnung auch noch die Kettenregel.

- $u(x) = 3\sin^2 x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \bullet\ g(x) = \sin x & \Rightarrow & g'(x) = \cos x \\ \bullet\ u(g) = 3g^2 & \Rightarrow & u'(g) = 6g \\ u'(x) = 6g \cdot \cos x & & \\ \quad = 6 \cdot (\sin x) \cdot \cos x & & \end{array} \right\}$
- $v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$

Die Produktregel kann angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 6 \cdot (\sin x) \cdot (\cos x) \cdot \cos x + 3 \cdot (\sin^2 x) \cdot (-\sin x) \\ f''(x) &= 6 \cdot (\sin x) \cdot \cos^2 x - 3\sin^3 x \end{aligned}$$

3.12 Funktion 12

$$f(x) = \sin^4 x$$

Auf den ersten Blick ist dies das gleiche, wie bei Funktion 4. Tatsächlich muss aber hier zuerst der Sinuswert bestimmt werden, bevor die vierte Potenz gebildet wird. Daher ist jetzt die Sinusfunktion die innere Funktion.

- $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$
- $f(g) = g^4 \Rightarrow f'(g) = 4g^3$

Hiermit kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\ &= 4g^3 \cdot \cos x \\ f'(x) &= 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung kommt wie zuvor die Produktregel zum Einsatz. Ebenso benötigen wir bei der Bestimmung von $u'(x)$ in der Nebenrechnung auch noch die Kettenregel.

- $u(x) = 4\sin^3 x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \bullet\ g(x) = \sin x & \Rightarrow & g'(x) = \cos x \\ \bullet\ u(g) = 4g^3 & \Rightarrow & u'(g) = 12g^2 \\ u'(x) = 12g^2 \cdot \cos x & & \\ \quad = 12 \cdot (\sin^2 x) \cdot \cos x & & \end{array} \right\}$
- $v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$

Die Produktregel kann angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 12 \cdot (\sin^2 x) \cdot (\cos x) \cdot \cos x + 4 \cdot (\sin^3 x) \cdot (-\sin x) \\ f''(x) &= 12 \cdot (\sin^2 x) \cdot \cos^2 x - 4\sin^4 x \end{aligned}$$

3.13 Funktion 13

$$f(x) = \sin x^2$$

Hier haben wir wieder ein Beispiel einer Funktion von einer Funktion, also zur Anwendung der Kettenregel. Die *innere Funktion* ist der Teil, der *zuerst* berechnet werden muss. Das ist in diesem Fall das x^2. Daher muss dieser Term als $g(x)$ bezeichet werden.

- $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$
- $f(g) = \sin g \Rightarrow f'(g) = \cos g$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot f'(g) \\ &= 2x \cdot \cos g \\ f'(x) &= 2x \cdot \cos x^2 \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung benötigen wir die *Produktregel*, denn $f(x)$ ist das Produkt zweier Teilfunktionen. Dabei ist zur Bestimmung von v'(x) als Nebenrechnung noch zusätzlich die Kettenregel notwendig.

- $u(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2$
- $v(x) = \cos x^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x \\ \bullet \quad v(g) = \cos g \quad \Rightarrow \quad v'(g) = -\sin g \\ v'(x) = 2x \cdot (-\sin g) = -2x \cdot \sin x^2 \end{array} \right\}$

Die Produktregel kann angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2 \cdot \cos x^2 + 2x \cdot (-2x \cdot \sin x^2) \\ f''(x) &= 2 \cdot \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2 \end{aligned}$$

3.14 Funktion 14

$$f(x) = \cos x^3$$

Auch hier kommt die Kettenregel zur Anwendung. Die *innere Funktion* ist der Teil, der *zuerst* berechnet werden muss. Das ist in diesem Fall das x^3. Daher muss dieser Term als $g(x)$ bezeichet werden.

- $g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$
- $f(g) = \cos g \Rightarrow f'(g) = -\sin g$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot f'(g) \\ &= 3x^2 \cdot (-\sin g) \\ f'(x) &= -3x^2 \cdot \sin x^3 \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung benötigen wir die *Produktregel*, denn $f(x)$ ist das Produkt zweier Teilfunktionen. Dabei ist zur Bestimmung von v'(x) als Nebenrechnung noch zusätzlich die Kettenregel notwendig.

- $u(x) = -3x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -6x$
- $v(x) = \sin x^3 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad g(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3x^2 \\ \bullet \quad v(g) = \sin g \quad \Rightarrow \quad v'(g) = \cos g \\ v'(x) = 3x^2 \cdot (\cos g) = 3x^2 \cdot \cos x^3 \end{array} \right\}$

Die Produktregel kann angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= -6x \cdot \sin x^3 - 3x^2 \cdot 3x^2 \cdot \cos x^3 \\ f''(x) &= -6x \cdot \sin x^3 - 9x^4 \cos x^3 \end{aligned}$$

3.15 Funktion 15

$$f(x) = \sin 3x^4$$

Hier haben wir wieder ein Beispiel einer Funktion von einer Funktion, also zur Anwendung der Kettenregel. Die *innere Funktion* ist der Teil, der *zuerst* berechnet werden muss. Das ist in diesem Fall der Term $3x^4$. Daher muss dieser Term als $g(x)$ bezeichet werden.

- $g(x) = 3x^4 \Rightarrow g'(x) = 12x^3$
- $f(g) = \sin g \Rightarrow f'(g) = \cos g$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot f'(g) \\ &= 12x^3 \cdot \cos g \\ &= 12x^3 \cdot \cos 3x^4 \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung benötigen wir die *Produktregel*, denn $f(x)$ ist das Produkt zweier Teilfunktionen. Dabei ist zur Bestimmung von v'(x) als Nebenrechnung noch zusätzlich die Kettenregel notwendig.

- $u(x) = 12x^3 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 36x^2$
- $v(x) = \cos 3x^4 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad g(x) = 3x^4 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 12x^3 \\ \bullet \quad v(g) = \cos g \quad \Rightarrow \quad v'(g) = -\sin g \\ v'(x) = 12x^3 \cdot (-\sin g) = -12x^3 \cdot \sin 3x^4 \end{array} \right\}$

Die zweite Ableitung kann damit gebildet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 36x^2 \cdot \cos 3x^4 + 12x^3 \cdot (-12x^3 \cdot \sin 3x^4) \\ f''(x) &= 36x^2 \cdot \cos 3x^4 - 144x^6 \sin 3x^4 \end{aligned}$$

3.16 Funktion 16

$$f(x) = e^{x+2}$$

Auch hier erkennt man eine Unterfunktion (der Exponent). Darum wird die *Kettenregel* verwendet.

- $g(x) = x+2 \Rightarrow g'(x) = 1$
- $f(g) = e^g \Rightarrow f'(g) = e^g$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot f'(g) \\ &= 1 \cdot e^g \\ f'(x) &= e^{x+2} \end{aligned}$$

Schaut man sich die Ableitung an, stellt man fest, dass sie **identisch** mit der Stammfunktion ist. Daher kann man auch sofort die zweite Ableitung angeben, da sie nach gleichem Muster gebildet wird.

$$f''(x) = e^{x+2}$$

3.17 Funktion 17

$$f(x) = e^{2x-1}$$

Wieder muss die Kettenregel verwendet werden.

- $g(x) = 2x-1 \Rightarrow g'(x) = 2$
- $f(g) = e^g \Rightarrow f'(g) = e^g$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot f'(g) \\ &= 2 \cdot e^g \\ f'(x) &= 2 \cdot e^{2x-1} \end{aligned}$$

Auch für die zweite Ableitung ist wieder die Kettenregel zuständig.

- $g(x) = 2x-1 \Rightarrow g'(x) = 2$
- $f(g) = 2e^g \Rightarrow f'(g) = 2e^g$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= g'(x) \cdot f'(g) \\ &= 2 \cdot 2e^g \\ f''(x) &= 4 \cdot e^{2x-1} \end{aligned}$$

3.18 Funktion 18

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Auch hier muss die Kettenregel verwendet werden.

$$\begin{array}{lrcl@{\quad\Rightarrow\quad}rcl}
\bullet & g(x) & = & \sin x & g'(x) & = & \cos x \\
\bullet & f(g) & = & e^g & f'(g) & = & e^g
\end{array}$$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= g'(x) \cdot f'(g) \\
&= (\cos x) \cdot e^g \\
f'(x) &= e^{\sin x} \cdot \cos x
\end{aligned}$$

Die erste Ableitung stellt sich als Produkt dar. Wir müssen also die *Produktregel* anwenden, um die zweite Ableitung zu bestimmen.

$$\begin{array}{lrcl@{\quad\Rightarrow\quad}rcll}
\bullet & u(x) & = & e^{\sin x} & u'(x) & = & e^{\sin x} \cdot \cos x & \Big(\text{siehe } f'(x)\Big) \\
\bullet & v(x) & = & \cos x & v'(x) & = & -\sin x &
\end{array}$$

Die Produktregel kann angewendet werden.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x) \\
f''(x) &= e^{\sin x} \cdot \cos^2 x - e^{\sin x} \cdot \sin x
\end{aligned}$$

3.19 Funktion 19

$$f(x) = e^{x^2-x}$$

Auch hier muss die Kettenregel verwendet werden.

$$\begin{array}{llllllll}\bullet & g(x) & = & x^2-x & \Rightarrow & g'(x) & = & 2x-1 \\ \bullet & f(g) & = & e^g & \Rightarrow & f'(g) & = & e^g\end{array}$$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot f'(g) \\ &= (2x-1) \cdot e^g \\ f'(x) &= (2x-1) \cdot e^{x^2-x} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung muss die *Produktregel* angewendet werden, da $f'(x)$ ein Produkt darstellt.

$$\begin{array}{llllllll}\bullet & u(x) & = & 2x-1 & \Rightarrow & u'(x) & = & 2 \\ \bullet & v(x) & = & e^{x^2-x} & \Rightarrow & v'(x) & = & (2x-1) \cdot e^{x^2-x} \quad \Big(\text{siehe } f'(x)\Big)\end{array}$$

Die Produktregel kann angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2 \cdot e^{x^2-x} + (2x-1) \cdot (2x-1) \cdot e^{x^2-x} \\ &= 2 \cdot e^{x^2-x} + (2x-1)^2 \cdot e^{x^2-x} \\ &= 2 \cdot e^{x^2-x} + (4x^2-4x+1) \cdot e^{x^2-x} \\ &= (2+4x^2-4x+1) \cdot e^{x^2-x} \\ f''(x) &= (4x^2-4x+3) \cdot e^{x^2-x} \end{aligned}$$

3.20 Funktion 20

$$f(x) = 10^{2x+5}$$

Hier haben wir ein Problem. Eine Potenzfunktion mit 10 als Basis ist nicht als Grundfunktion bekannt. Daher muss die Funktion so umgeformt werden, dass man anstelle der **10** das ***e*** als Basis erhält. Man ersetzt die 10 durch einen Term e^z, wobei man z noch bestimmen muss. Dazu benötigt man Grundkenntnisse von Logarithmen.[1] Wir lösen die Gleichung nach z auf.

$$\begin{aligned} e^z &= 10 \qquad |\ln\ldots \\ z &= \ln 10 \end{aligned}$$

Setzt man für die 10 den Term $e^z = e^{\ln 10}$ ein, so lässt sich die Funktion folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 10^{2x+5} \\ &= \left(e^{\ln 10}\right)^{2x+5} \\ &= e^{(\ln 10)\cdot(2x+5)} \\ f(x) &= e^{2x\cdot\ln 10+5\cdot\ln 10} \end{aligned}$$

In dieser Form kann die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel bestimmt werden.

- $g(x) = 2x\cdot\ln 10 + 5\cdot\ln 10 \quad\Rightarrow\quad g'(x) = 2\cdot\ln 10$
- $f(g) = e^g \quad\Rightarrow\quad f'(g) = e^g$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)\cdot f'(g) \\ &= (2\cdot\ln 10)\cdot e^g \\ &= (2\cdot\ln 10)\cdot e^{2x\cdot\ln 10+5\cdot\ln 10} \\ f'(x) &= (2\cdot\ln 10)\cdot 10^{2x+5} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung kommt erneut die Kettenregel zum Einsatz. Hierbei geht man wieder von dieser Form der ersten Ableitung aus:

$$f'(x) = (2\cdot\ln 10)\cdot e^{2x\cdot\ln 10+5\cdot\ln 10}$$

Die Unterfunktion und die Teilableitungen werden aufgestellt.

- $g(x) = 2x\cdot\ln 10 + 5\cdot\ln 10 \quad\Rightarrow\quad g'(x) = 2\cdot\ln 10$
- $f(g) = (2\cdot\ln 10)\cdot e^g \quad\Rightarrow\quad f'(g) = (2\cdot\ln 10)\cdot e^g$

Mit diesen Werten kann die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= g'(x)\cdot f'(g) \\ &= (2\cdot\ln 10)\cdot e^g\cdot(2\cdot\ln 10) \\ &= (2\cdot\ln 10)^2\cdot e^{2x\cdot\ln 10+5\cdot\ln 10} \\ f''(x) &= 4\cdot(\ln 10)^2\cdot 10^{2x+5} \end{aligned}$$

[1]Grundlagen der Logarthmen findet man hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/logarit.pdf

3.21 Funktion 21

$$f(x) = e^{(3x+2)^2}$$

Versucht man, die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel zu bestimmen – der Exponent ist dabei die innere Funktion – dann stellt man fest, dass auch beim Ableiten der inneren Funktion noch einmal die Kettenregel erforderlich ist. Daher beginne ich mit der Ableitung des Exponenten.

$$g(x) = (3x+2)^2$$

Diese Teilfunktion wird nun abgeleitet.

- $h(x) = 3x+2 \Rightarrow h'(x) = 3$
- $g(h) = h^2 \Rightarrow g'(h) = 2h$

Mit diesen Werten kann nun $g'(x)$ mit Hilfe der Kettenregel bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= g'(h) \cdot h'(x) \\
&= 2h \cdot 3 \\
&= 2 \cdot (3x+2) \cdot 3 \\
g'(x) &= 6 \cdot (3x+2)
\end{aligned}$$

Es folgt die äußere Funktion un deren Ableitung.

- $f(g) = e^g \quad \Rightarrow \quad f'(g) = e^g$

Mit diesen Werten kann jetzt die erste Gesamt-Ableitung bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\
&= e^g \cdot 6 \cdot (3x+2) \\
f'(x) &= e^{(3x+2)^2} \cdot 6 \cdot (3x+2)
\end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung ist jetzt die *Produktregel* zuständig.

- $u(x) = e^{(3x+2)^2} \Rightarrow u'(x) = e^{(3x+2)^2} \cdot 6 \cdot (3x+2) \quad \Big(\text{siehe } f'(x)\Big)$
- $v(x) = 6 \cdot (3x+2) \Rightarrow v'(x) = 18$

Die Produktregel kann angewendet werden.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= e^{(3x+2)^2} \cdot 6 \cdot (3x+2) \cdot 6 \cdot (3x+2) + e^{(3x+2)^2} \cdot 18 \\
&= e^{(3x+2)^2} \cdot 36 \cdot (3x+2)^2 + e^{(3x+2)^2} \cdot 18 \\
&= e^{(3x+2)^2} \cdot 36 \cdot (9x^2+12x+4) + e^{(3x+2)^2} \cdot 18 \\
&= e^{(3x+2)^2} \cdot (324x^2+432x+144) + e^{(3x+2)} \cdot 18 \\
f''(x) &= e^{(3x+2)^2} \cdot (324x^2+432x+162)
\end{aligned}$$

3.22 Funktion 22

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

Die Funktion ist als Bruch, also als Quotient dargestellt. Daher kommt natürlich die Quotientenregel zum Einsatz. Wir bestimmen zunächst die Teilfunktionen des Zählers und des Nenners sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x+1 \quad\Rightarrow\quad u'(x) = 2 \\ v(x) &= 2x-1 \quad\Rightarrow\quad v'(x) = 2 \end{aligned}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ f'(x) &= \frac{2\cdot(2x-1)-(2x+1)\cdot 2}{(2x-1)^2} \\ f'(x) &= \frac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2} \\ f'(x) &= \frac{-4}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung kommt wieder die Quotientenregel zum Einsatz. Die hierbei festgelegten Unterfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ haben nichts mit den gleichnamigen Unterfunktionen aus der Bestimmung der ersten Ableitung zu tun. Die Namen werden also neu vergeben.

Tipp: Für die Ableitung der Nennerfunktion $v(x) = (2x-1)^2$ benötigen wir die Kettenregel. Man könnte zwar auch vorher den Nennerterm mit Hilfe der zweiten Binomischen Formel in ein Polynom verwandeln, das dann einfach abzuleiten ist, aber davon möchte ich abraten. Warum?

Normalerweise ist das Bestimmen der zweiten Ableitung kein Selbstzweck, sondern man benötigt sie, um damit weiter zu arbeiten. Da ist es günstig, wenn man sie zuvor vereinfacht. Das geht ***immer*** besser, wenn die faktorisierte Form aus der Kettenregel vorliegt, denn dann man kann den Bruch kürzen. Das schaun wir uns jetzt an.

$$
\begin{array}{rcl}
f'(x) & = & \dfrac{-\,4}{(2x-1)^2} \\
u(x) = -4 & \Rightarrow & u'(x) = 0 \\
v(x) = (2x-1)^2 & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = 2x-1 & \Rightarrow & g'(x) = 2 \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g = 2(2x-1) \\ v'(x) = 2 \cdot 2(2x-1) & = & 4(2x-1) \end{array} \right\} \\
f''(x) & = & \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
f''(x) & = & \dfrac{0 \cdot (2x-1)^2 - (-4) \cdot 4(2x-1)}{(2x-1)^4} \\
f''(x) & = & \dfrac{16 \cdot (2x-1)}{(2x-1)^4} \\
f''(x) & = & \dfrac{16}{(2x-1)^3}
\end{array}
$$

3.23 Funktion 23

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Auch bei dieser Funktion kommt die Quotientenregel zum Einsatz, weil sie einen Bruch darstellt. Die Teilfunktionen und deren Ableitungen lauten:

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) &=& x^2 - 1 & \Rightarrow & u'(x) &=& 2x \\ v(x) &=& x^2 + 1 & \Rightarrow & v'(x) &=& 2x \end{array}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ f'(x) &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung kommt wieder die Quotientenregel zum Einsatz. Auch hier empfehle ich, den Nennerterm nicht auszumultiplizieren, sondern lieber für $v'(x)$ die Kettenregel zu verwenden.

$$\begin{array}{rcl} u(x) = 4x & \Rightarrow & u'(x) = 4 \\ v(x) = (x^2 + 1)^2 & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = x^2 + 1 & \Rightarrow & g'(x) = 2x \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g = 2(x^2 + 1) \\ v'(x) = 2x \cdot 2(x^2 + 1) & = & 4x(x^2 + 1) \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ f''(x) &= \frac{4 \cdot (x^2 + 1)^2 - 4x \cdot 4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \\ f''(x) &= \frac{4 \cdot (x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \quad |(x^2 + 1) \text{ ausklammern} \\ f''(x) &= \frac{(x^2 + 1) \cdot [4 \cdot (x^2 + 1) - 16x^2]}{(x^2 + 1)^4} \quad | \text{ kürzen} \\ f''(x) &= \frac{4 \cdot (x^2 + 1) - 16x^2}{(x^2 + 1)^3} \\ f''(x) &= \frac{4x^2 + 4 - 16x^2}{(x^2 + 1)^3} \\ f''(x) &= \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

3.24 Funktion 24

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 1}$$

Auch bei dieser Funktion kommt die Quotientenregel zum Einsatz, weil sie einen Bruch darstellt. Wie die Lösung dann aussieht, hängt zunächst davon ab, ob man erkennt, dass der Nenner sich als Binomische Formel darstellt:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Nutzt man das aus, dann kann man die Ergebnisterme besser vereinfachen, wie man im Laufe der Rechnung sieht.

Lösungsweg 1: Nehmen wir zunächst an, wir hätten nicht erkannt, dass der Nenner umzuformen geht. Dann lauten die Teilfunktionen und deren Ableitungen:

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & 2x^2 - 3x + 4 & \Rightarrow & u'(x) & = & 4x - 3 \\ v(x) & = & x^2 - 2x + 1 & \Rightarrow & v'(x) & = & 2x - 2 \end{array}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(4x-3)\cdot(x^2-2x+1) - (2x^2-3x+4)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{4x^3 - 8x^2 + 4x - 3x^2 + 6x - 3 - (4x^3 - 4x^2 - 6x^2 + 6x + 8x - 8)}{(x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{4x^3 - 8x^2 + 4x - 3x^2 + 6x - 3 - 4x^3 + 4x^2 + 6x^2 - 6x - 8x + 8}{(x^2-2x+1)^2} \\ f'(x) &= \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x^2-2x+1)^2} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung wird ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt.

$$\begin{array}{rclcl} u(x) & = & -x^2 - 4x + 5 & \Rightarrow & u'(x) = -2x - 4 \\ v(x) & = & (x^2 - 2x + 1)^2 & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & x^2 - 2x + 1 & \Rightarrow & g'(x) & = & 2x - 2 \\ v(g) & = & g^2 & \Rightarrow & v'(g) & = & 2g \\ v'(x) & = & 2g \cdot (2x-2) & & & & \\ & = & 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot (2x - 2) & & & & \end{array} \right\} \end{array}$$

Hiermit wird nun die Quotientenregel angewendet.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(-2x-4)\cdot(x^2-2x+1)^2 - (-x^2-4x+5)\cdot 2\cdot(x^2-2x+1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} \end{aligned}$$

Hier kann jetzt im Zähler der Term $(x^2 - 2x + 1)$ ausgeklammert werden, so dass anschließend der Bruch dadurch gekürzt werden kann.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(-2x-4)\cdot(x^2-2x+1)^2 - (-x^2-4x+5)\cdot 2\cdot(x^2-2x+1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^4} \\
&= \frac{(x^2-2x+1)\cdot\Big((-2x-4)\cdot(x^2-2x+1) - (-x^2-4x+5)\cdot 2\cdot(2x-2)\Big)}{(x^2-2x+1)^4} \\
&= \frac{(-2x-4)\cdot(x^2-2x+1) - (-x^2-4x+5)\cdot 2\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^3} \\
&= \frac{-2x^3+4x^2-2x-4x^2+8x-4-(-4x^3+4x^2-16x^2+16x+20x-20)}{(x^2-2x+1)^3} \\
&= \frac{-2x^3+4x^2-2x-4x^2+8x-4+4x^3-4x^2+16x^2-16x-20x+20}{(x^2-2x+1)^3} \\
f''(x) &= \frac{2x^3+12x^2-30x+16}{(x^2-2x+1)^3}
\end{aligned}$$

Lösungsweg 2: Nehmen wir nun an, wir hätten die Binomische Formel im Nenner erkannt. Die Lösung sieht dann wie folgt aus.

$$f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{x^2-2x+1} = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$$

Die Lösung erfolgt auch hier wieder mit der Quotientenregel, jedoch muss der Nenner mit Hilfe der Kettenregel abgeleitet werden. Das hört sich zunächst komplizierter an, als Lösungsweg 1, wir werden aber sehen, es hilft beim Zusammenfassen.

$$\begin{array}{lclcl}
u(x) & = & 2x^2-3x+4 & \Rightarrow & u'(x) = 4x-3 \\
v(x) & = & (x-1)^2 & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{rcllrcl} g(x) & = & x-1 & \Rightarrow & g'(x) & = & 1 \\ v(g) & = & g^2 & \Rightarrow & v'(g) & = & 2g \\ v'(x) & = & 2g\cdot 1 & & & & \\ & = & 2\cdot(x-1) & & & & \end{array}\right\}
\end{array}$$

Hiermit wird nun die Quotientenregel angewendet.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{(4x-3)\cdot(x-1)^2 - (2x^2-3x+4)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}
\end{aligned}$$

Hier kann jetzt im Zähler der Term $(x-1)$ ausgeklammert werden, so dass anschließend der Bruch dadurch gekürzt werden kann.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(4x-3)\cdot(x-1)^2-(2x^2-3x+4)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}\\
&= \frac{(x-1)\cdot\Big((4x-3)\cdot(x-1)-(2x^2-3x+4)\cdot 2\Big)}{(x-1)^4}\\
&= \frac{(4x-3)\cdot(x-1)-(2x^2-3x+4)\cdot 2}{(x-1)^3}\\
&= \frac{4x^2-4x-3x+3-4x^2+6x-8}{(x-1)^3}\\
f'(x) &= \frac{-x-5}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung wird ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt.

$$\begin{array}{rclcl}
u(x) & = & -x-5 & \Rightarrow & u'(x) \;=\; -1\\
v(x) & = & (x-1)^3 & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{rcllrcl}
g(x) & = & x-1 & \Rightarrow & g'(x) & = & 1\\
v(g) & = & g^3 & \Rightarrow & v'(g) & = & 3g^2\\
v'(x) & = & 3g^2\cdot 1 & & & & \\
 & = & 3\cdot(x-1)^2 & & & &
\end{array}\right\}
\end{array}$$

Hiermit wird nun die Quotientenregel angewendet.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}\\
&= \frac{-1\cdot(x-1)^3-(-x-5)\cdot 3\cdot(x-1)^2}{(x-1)^6}
\end{aligned}$$

Hier kann jetzt im Zähler der Term $(x-1)^2$ ausgeklammert werden, so dass anschließend der Bruch dadurch gekürzt werden kann.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-1\cdot(x-1)^3-(-x-5)\cdot 3\cdot(x-1)^2}{(x-1)^6}\\
&= \frac{(x-1)^2\cdot\Big(-1\cdot(x-1)-(-x-5)\cdot 3\Big)}{(x-1)^6}\\
&= \frac{-1\cdot(x-1)-(-x-5)\cdot 3}{(x-1)^4}\\
&= \frac{-x+1-(-3x-15)}{(x-1)^4}\\
&= \frac{-x+1+3x+15}{(x-1)^4}\\
f''(x) &= \frac{2x+16}{(x-1)^4}
\end{aligned}$$

Fazit: Vergleichen wir die Ergebnisse aus den beiden Lösungswegen, stellt man fest, dass sie sehr verschieden aussehen. Lösungsweg 2 liefert einfachere Ergebnisse. Prinzipiell lassen sich die Ergebnisse aus Lösungsweg 1 in die gleiche Form bringen, man sieht es nur nicht sofort. Man müsste im Zähler und im Nenner jeweils mit Hilfe einer Polynomdivision [2] den Term $(x-1)$ ausklammern und dadurch kürzen.

3.25 Funktion 25

$$\mathrm{f}(x) = 4x^3 - 12x^2 + \pi x - \pi^2$$

Die Ableitungen können mit der Summenregel und der Konstantenregel mit Hilfe der Potenzfunktion bestimmt werden. Zu bemerken ist allenfalls, dass π und somit auch $\pi^2 \approx 9,87$ eine Konstante ist und entsprechend behandelt wird.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x^1 + \pi x^0 \\ &= 12x^2 - 24x + \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12 \cdot 2x^1 - 24 \cdot 1x^0 \\ &= 24x - 24 \end{aligned}$$

3.26 Funktion 26

$$f(x) = 2x^5 - 3e^2x^3$$

Lösungen wie bei Funktion 1. Hier ist e^2 mit $\approx 7,389$ wie zuvor schon π natürlich als Konstante zu behandeln.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 5x^4 - 3 \cdot e^2 \cdot 3x^2 \\ &= 10x^4 - 9e^2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 10 \cdot 4x^3 - 9 \cdot e^2 \cdot 2x^1 \\ &= 40x^3 - 18e^2x \end{aligned}$$

[2] Einzelheiten zur Polynomdivision siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/polynomd.pdf

3.27 Funktion 27

$$f(x) = (2x+5)\cdot(3x-4)$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = 2x+5 \Rightarrow u'(x) = 2$
- $v(x) = 3x-4 \Rightarrow v'(x) = 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= 2\cdot(3x-4) + (2x+5)\cdot 3 \\ &= 6x-8+6x+15 \\ &= 12x+7 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung geht dann ganz einfach mit der Kostantenregel:

$$f''(x) = 12$$

Alternativ kann man die erste Ableitung auch ohne die Produktregel bestimmen, indem man zunächst bei $f(x)$ die Klammern ausmultipliziert und danach mit Summen- und Konstantenregel weiter arbeitet.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+5)(3x-4) \\ &= 6x^2-8x+15x-20 \\ &= 6x^2+7x-20 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 12x+7$$

3.28 Funktion 28

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$
- $v(x) = \sin x \Rightarrow v'(x) = \cos x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Für die zweite Ableitung muss die Produktregel sowohl für das erste als auch das zweite Produkt angewendet werden. Ich nenne das erste Produkt $g(x)$ und das zweite Produkt $h(x)$.

$$g(x) = 2x \cdot \sin x \qquad h(x) = x^2 \cdot \cos x$$

Beginnen wir mit $g'(x)$:

- $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$
- $v(x) = \sin x \Rightarrow v'(x) = \cos x$

$$g'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x$$

Nun wird nach gleichem Muster $h'(x)$ berechnet.

$$h(x) = x^2 \cdot \cos x$$

- $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$
- $v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$

$$h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x$$

Jetzt wird alles nach der Summenregel zusammengesetzt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= g'(x) + h'(x) \\ &= 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x \\ f''(x) &= (2 - x^2) \cdot \sin x + 4x \cdot cosx \end{aligned}$$

3.29 Funktion 29

$$f(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = x^2 + 3x \Rightarrow u'(x) = 2x + 3$
- $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (2x + 3) \cdot e^x + (x^2 + 3x) \cdot e^x = (x^2 + 5x + 3) \cdot e^x$$

Auch die zweite Ableitung muss mit der Produktregel bestimmt werden.

- $u(x) = x^2 + 5x + 3 \Rightarrow u'(x) = 2x + 5$
- $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (2x + 5) \cdot e^x + (x^2 + 5x + 3) \cdot e^x = (x^2 + 7x + 8) \cdot e^x$$

3.30 Funktion 30

$$f(x) = (\sqrt{x} - 2) \cdot e^x$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Vorweg bestimme ich aber die Ableitung der Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$.

$$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Ich bilde nun die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = \sqrt{x} - 2 \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
- $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot e^x + \left(\sqrt{x} - 2\right) \cdot e^x = \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2\right) \cdot e^x$$

Die zweite Ableitung wird wiederum mit der Produktregel gebildet. Vorweg bestimme ich jedoch die Ableitung der Teilfunktion $h(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$.

$$h(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}}$$

Ich bilde nun die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2 \Rightarrow u'(x) = -\dfrac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} + \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
- $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= \left(-\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}\right) \cdot e^x + \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2\right) \cdot e^x \\
f''(x) &= \left(-\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2\right) \cdot e^x
\end{aligned}$$

3.31 Funktion 31

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

Hier ist es sehr sinnvoll, sich vor dem Losrechnen die Funktion einmal genauer anzusehen. Der Zähler lässt sich nämlich als Binom deuten. Damit lässt sich die Funktion deutlich vereinfachen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2$$

Durch das Kürzen wurde übrigens auch der Definitionsbereich erweitert, $x = 2$ gehört jetzt auch dazu.

In dieser Form lassen sich die Ableitungen ganz einfach bilden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ f''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Sieht man diese Vereinfachungsmöglichkeit **nicht**, dann bleibt nur die Quotientenregel, weil die Funktion einen Bruch darstellt. Die Teilfunktionen und deren Ableitungen lauten dann:

$$\begin{aligned} u(x) = x^2 - 4x + 4 &\Rightarrow u'(x) = 2x - 4 \\ v(x) = x - 2 &\Rightarrow v'(x) = 1 \end{aligned}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x-4) \cdot (x-2) - (x^2 - 4x + 4) \cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 4}{(x-2)^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung kommt wieder die Quotientenregel zum Einsatz. Auch hier empfehle ich, den Nennerterm nicht auszumultiplizieren, sondern lieber für $v'(x)$ die

Kettenregel zu verwenden.

$$u(x) = x^2 - 4x + 4 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2x - 4$$

$$v(x) = (x-2)^2 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = x - 2 & \Rightarrow & g'(x) = 1 \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g = 2(x-2) \\ v'(x) = 1 \cdot 2(x-2) & = & 2(x-2) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{(2x-4) \cdot (x-2)^2 - (x^2 - 4x + 4) \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} && \mid (x{-}2) \text{ ausklammern} \\
&= \frac{(x-2) \cdot \Big((2x-4) \cdot (x-2) - (x^2 - 4x + 4) \cdot 2 \Big)}{(x-2)^4} && \mid \text{kürzen} \\
&= \frac{(2x-4) \cdot (x-2) - (x^2 - 4x + 4) \cdot 2}{(x-2)^3} \\
&= \frac{(2x^2 - 4x - 4x + 8) - (2x^2 - 8x + 8)}{(x-2)^3} \\
&= \frac{2x^2 - 8x + 8 - 2x^2 + 8x - 8}{(x-2)^3} \\
&= \frac{0}{(x-2)^3} \\
f''(x) &= 0
\end{aligned}$$

Natürlich ist die erste Ableitung mit der einfachen Form im ersten Ansatz identisch. Dazu müsste man wieder Zähler und Nenner faktorisieren und kürzen. Wer das im Anfang aber schon nicht gesehen hat, der sieht das hier erst recht nicht. Bei der zweiten Ableitung ist es jedoch offensichtlich.

3.32 Funktion 32

$$f(x) = \frac{x \cdot e^x}{5x-1}$$

Und wieder kommt die Quotientenregel zum Einsatz, weil sie einen Bruch darstellt. Im Zähler haben wir aber ein Produkt. Wir benötigen also zur Ableitung des Zählers die Produktregel. Die Teilfunktionen und deren Ableitungen lauten:

$$\begin{array}{lll} u(x) = x \cdot e^x & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} U(x) = x & \Rightarrow & U'(x) = 1 \\ V(x) = e^x & \Rightarrow & V'(x) = e^x \\ u'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x & = & (1+x) \cdot e^x \end{array} \right\} \\ v(x) = 5x - 1 & \Rightarrow & v'(x) = 5 \end{array}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(1+x) \cdot e^x \cdot (5x-1) - x \cdot e^x \cdot 5}{(5x-1)^2} \\ &= \frac{(5x - 1 + 5x^2 - x - 5x) \cdot e^x}{(5x-1)^2} \\ f'(x) &= \frac{(5x^2 - x - 1) \cdot e^x}{(5x-1)^2} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung wird ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt. Da wir im Zähler wieder ein Produkt haben, muss hier in der Nebenrechnung die Produktregel verwendet werden. Bei der Ableitung des Nenners kommt die Kettenregel zum Einsatz.

$$u(x) = (5x^2 - x - 1)e^x \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} U(x) = (5x^2 - x - 1) & \Rightarrow & U'(x) = 10x - 1 \\ V(x) = e^x & \Rightarrow & V'(x) = e^x \\ u'(x) = (10x - 1)e^x + (5x^2 - x - 1)e^x & = & (5x^2 + 9x - 2)e^x \end{array} \right\}$$

$$v(x) = (5x - 1)^2 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = 5x - 1 & \Rightarrow & g'(x) = 5 \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g = 2(5x - 1) \\ v'(x) = 5 \cdot 2(5x - 1) & = & 10(5x - 1) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{(5x^2 + 9x - 2)e^x \cdot (5x - 1)^2 - (5x^2 - x - 1)e^x \cdot 10(5x - 1)}{(5x - 1)^4} \\
&= \frac{(5x - 1) \cdot \Big((5x^2 + 9x - 2)e^x \cdot (5x - 1) - (5x^2 - x - 1)e^x \cdot 10\Big)}{(5x - 1)^4} \\
&= \frac{\Big((5x^2 + 9x - 2) \cdot (5x - 1) - (5x^2 - x - 1) \cdot 10\Big) \cdot e^x}{(5x - 1)^3} \\
&= \frac{(25x^3 - 5x^2 + 45x^2 - 9x - 10x + 2 - 50x^2 + 10x + 10) \cdot e^x}{(5x - 1)^3} \\
f''(x) &= \frac{(25x^3 - 10x^2 - 9x + 12) \cdot e^x}{(5x - 1)^3}
\end{aligned}$$

3.33 Funktion 33

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$
- $v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Für die zweite Ableitung kommt die Summenregel zum Einsatz. Dabei wird für jeden Summanden die Kettenregel benötigt.

$u(x) = \cos^2 x$

- $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$
- $u(g) = g^2 \Rightarrow u'(g) = 2g$

$$u'(x) = u'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot (-\sin x) = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$u(x) = \sin^2 x$

- $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$
- $u(g) = g^2 \Rightarrow u'(g) = 2g$

$$u'(x) = u'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$f''(x) = u'(x) - v'(x) = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -4 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

3.34 Funktion 34

$$f(x) = \sin x^4$$

Hier haben wir das klassische Beispiel einer Funktion von einer Funktion, also zur Anwendung der Kettenregel. Die *innere Funktion* ist der Teil, der *zuerst* berechnet werden muss. Das ist in diesem Fall das x^4. Daher muss dieser Term als $g(x)$ bezeichet werden.

$f(x) = \sin x^4$

- $g(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 4x^3$
- $f(g) = \sin g \quad \Rightarrow \quad f'(g) = \cos g$

$f'(x) = g'(x) \cdot f'(g) = 4x^3 \cdot \cos g = 4x^3 \cos x^4$

Für die zweite Ableitung benötigen wir die *Produktregel*, denn $f(x)$ ist das Produkt zweier Teilfunktionen. Dabei ist zur Bestimmung von v'(x) als Nebenrechnung noch zusätzlich die Kettenregel notwendig.

- $u(x) = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 12x^2$
- $v(x) = \cos x^4 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad g(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 4x^3 \\ \bullet \quad v(g) = \cos g \quad \Rightarrow \quad v'(g) = -\sin g \\ v'(x) = 4x^3 \cdot (-\sin g) = -4x^3 \sin x^4 \end{array} \right\}$

$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 12x^2 \cdot \cos x^4 + 4x^3 \cdot (-4x^3 \sin x^4)$
$f''(x) = 12x^2 \cos x^4 - 16x^6 \sin x^4$

3.35 Funktion 35

$$f(x) = 2e^{5x}$$

Wieder haben wir eine Funktion von einer Funktion, also kommt die Kettenregel zum Einsatz. Hierbei ist der Exponent zuerst zu berechnen; daher stellt er die innere Funktion dar.

$f(x) = 2e^{5x}$
- $g(x) = 5x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 5$
- $f(g) = 2e^g \quad \Rightarrow \quad f'(g) = 2e^g$

$f'(x) = g'(x) \cdot f'(g) = 5 \cdot 2e^g = 10e^{5x}$

Für die zweite Ableitung ist ebenfalls die Kettenregel erforderlich, denn wir haben wieder die Funktion von einer Funktion. Dazu schreibe ich vorübergehend $h(x)$ für $f'(x)$.

$h(x) = 10e^{5x}$
- $g(x) = 5x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 5$
- $h(g) = 10e^g \quad \Rightarrow \quad h'(g) = 10e^g$

$f''(x) = h'(x) = 5 \cdot 10e^g = 50e^{5x}$

3.36 Funktion 36

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

Hier muss die Kettenregel angewendet werden und zwar gleich doppelt.

$$\begin{array}{rcllrcl} g(x) & = & 3x & \Rightarrow & g'(x) & = & 3 \\ h(g) & = & \sin g & \Rightarrow & h'(g) & = & \cos g = \cos 3x \\ f(h) & = & e^h & \Rightarrow & f'(h) & = & e^h = e^{\sin 3x} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & g'(x) \cdot h'(g) \cdot f'(h) \\ f'(x) & = & 3 \cdot (\cos 3x) \cdot e^{\sin 3x} \end{array}$$

Für die zweite Ableitung muss nun die Produktregel angewendet werden. Gleichzeitig muss für den ersten Faktor $u(x) = 3 \cdot \cos 3x$ die Kettenregel angewendet werden.
Die Ableitung des zweiten Faktors $v(x) = e^{\sin 3x}$ ist bereits bekannt, denn dieser zweite Faktor stellt $f(x)$ dar. $v'(x)$ ist also identisch mit $f'(x)$.

$$u(x) = 3 \cdot \cos 3x \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = 3x & \Rightarrow & g'(x) = 3 \\ u(g) = 3 \cdot \cos g & \Rightarrow & u'(g) = -3 \cdot \sin g = -3 \cdot \sin 3x \\ u'(x) = 3 \cdot (-3 \cdot \sin 3x) & = & -9 \cdot \sin 3x \end{array} \right\}$$

$$v(x) = e^{\sin 3x} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 3 \cdot (\cos 3x) \cdot e^{\sin 3x}$$

Nun kann die Produktregel angewendet werden.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= (-9 \cdot \sin 3x) \cdot e^{\sin 3x} + (3 \cdot \cos 3x) \cdot 3 \cdot \cos 3x \cdot e^{\sin 3x} \\
&= -9 \cdot (\sin 3x) \cdot e^{\sin 3x} + 9 \cdot (\cos^2 3x) \cdot e^{\sin 3x} \\
f''(x) &= (-9 \cdot \sin 3x + 9 \cdot \cos^2 3x) \cdot e^{\sin 3x}
\end{aligned}
$$