

Die Cramersche Regel

Wolfgang Kippels

22. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Vorwort | 2 |
| 2 | Einleitung | 3 |
| 3 | Die Cramersche Regel in allgemeiner Form | 3 |
| 4 | Auflösen einer Determinante | 4 |
| 4.1 | Fall 1: Zweireihige Determinanten | 4 |
| 4.2 | Fall 2: Dreireihige Determinanten | 4 |
| 4.3 | Fall 3: Viereihige Determinanten | 5 |
| 5 | Einige durchgerechnete Beispiele | 5 |
| 5.1 | Beispiel 1 | 5 |
| 5.2 | Beispiel 2 | 7 |
| 5.3 | Beispiel 3 | 8 |
| 6 | Nachtrag | 10 |

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

Hier werden einige Beispielaufgaben mit Hilfe der Cramerschen Regel durchgerechnet. Zuvor wird jedoch die Cramersche Regel in etwas verallgemeinerter Form dargestellt.

3 Die Cramersche Regel in allgemeiner Form

Dargestellt wird die Cramersche Regel an einem Lineargleichungssystem dritter Ordnung als Beispiel. Die allgemeine Schreibweise für ein System n -ter Ordnung ist zwar möglich und auch unter Wissenschaftlern üblich, ist aber für einen lernenden „Neuling“ aus meiner Sicht unnötig unübersichtlich.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem in der Normalform:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned}$$

Dann erhalten wir die Lösungen für x_1 bis x_3 durch den Quotienten aus zwei Determinanten¹ in der Form:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Wenn man sich die Determinanten genauer ansieht, dann wird man schnell die Systematik darin erkennen. Betrachten wir zunächst die Nenner-Determinanten. Die sind bei allen drei Brüchen identisch. Sie bestehen aus den Koeffizienten a_{11} bis a_{33} aus dem Gleichungssystem in genau der gleichen Position zueinander, wie im Gleichungssystem. Die jeweiligen Zähler entstehen aus den Nennern, indem **genau eine Spalte** durch die Werte b_1 bis b_3 ersetzt wird. Es wird jeweils **genau die** Spalte ersetzt, aus der die zu bestimmende Variable stammt, also bei x_1 die vordere Spalte, bei x_2 die mittlere und bei x_3 die hintere Spalte. Alle anderen Spalten sind mit dem Nenner des Bruches identisch.

Wenn wir nur zwei Gleichungen mit zwei Variablen haben, dann wendet man dieses System entsprechend genauso an. Sinngemäß das Gleiche gilt auch für Gleichungssysteme mit einem höheren Grad als drei.

¹Was eine Determinante ist und wie sie berechnet wird, wird später im Verlauf dieses Skriptes oder auch etwas ausführlicher hier dargestellt: <https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/det.pdf>

4 Auflösen einer Determinante

Es nützt wenig, einen Bruch zwei Determinanten aufzustellen, wenn man nicht weiß, wie eine Determinante ausgerechnet wird. Dies soll im folgenden hier dargestellt werden

Beim Auflösen einer Determinante muss man grundsätzlich drei verschiedene Fälle unterscheiden.

1. Die Determinante ist zweireihig.
2. Die Determinante ist dreireihig.
3. Die Determinante hat mehr als drei Reihen.

4.1 Fall 1: Zweireihige Determinanten

Eine zweireihige Determinante ist wie folgt definiert:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Am besten versucht man, sich die Reihenfolge der Faktoren optisch zu verinnerlichen. Das erste Produkt $a_{11} \cdot a_{22}$ ist das Produkt über die Diagonale von links oben nach rechts unten. Man spricht auch von der *Hauptdiagonalen*. Das Produkt entlang der Hauptdiagonalen ist positiv. Das zweite Produkt $a_{21} \cdot a_{12}$ hat ein Minuszeichen, ist also negativ. Es wurde über die andere Diagonale gebildet, die sogenannte *Nebendiagonale*. Auf diese Weise sollten sich die beiden Produkte merken lassen.

4.2 Fall 2: Dreireihige Determinanten

Mehreihige Determinanten sind in aller Regel nicht einfach zu bestimmen. Für eine Determinante mit **genau drei** Reihen gibt es aber den Lehrsatz von *Sarrus*. Dieser Satz erlaubt ein direktes Berechnen. Das sieht dann so aus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

In dieser Form kann man sich das aber kaum merken. Daher empfiehlt es sich, die Determinante um zwei weitere Spalten als Merkhilfe zu ergänzen. Man schreibt einfach die erste und zweite Spalte noch einmal hinter die Determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

In dieser Form kann man drei Hauptdiagonalen bilden, indem man bei a_{11} , bei a_{12} und bei a_{13} beginnt und jeweils nach rechts unten weiter geht. Diese Diagonalen sind **rot** markiert. Die drei Parameter auf jeder dieser Diagonalen werden miteinander multipliziert. Entsprechend liegen drei negative Diagonalen von links unten nach rechts oben bei a_{31} , bei a_{32} und bei a_{33} beginnend. Auch hier werden jeweils die drei Parameter auf diesen Diagonalen miteinander multipliziert. Diese Diagonalen sind **blau** markiert. Man muss allerdings ganz genau auf die Vorzeichen achten, Vorzeichenfehler sind hier die am häufigsten auftretenden Fehler.

4.3 Fall 3: Vielreihige Determinanten

Determinanten mit mehr als drei Reihen können leider nur mit dem sogenannten *Entwicklungssatz* bestimmt werden. Wie man mit dem Entwicklungssatz arbeitet, ist hier dargestellt:

<https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/det.pdf>

Hier findet man auch weitergehende Informationen zu Determinanten.

5 Einige durchgerechnete Beispiele

5.1 Beispiel 1

$$\begin{aligned} (1) \quad & 3x - 2y + 2z = 10 \\ (2) \quad & 4x + 2y - 3z = 1 \\ (3) \quad & 2x - 3y + 2z = 7 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel wollen wir zunächst die Variable x bestimmen. Das geht mit dem Ansatz:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}$$

Wie man leicht sehen kann, ist die Determinante im Nenner genau der „Zahlenhaufen“, der als Koeffizienten (Vorzeichen) vor den Variablen x , y und z steht. Die Determinante im Zähler ist fast identisch, nur die erste Spalte wurde durch die rechten Seiten der Gleichungen ersetzt. Damit das Ganze vernünftig berechenbar wird, schreiben wir – wie oben besprochen – jeweils die erste und zweite Spalte als Gedankenstütze noch einmal hinter die jeweilige Determinante. Dann können wir rechnen, indem wir die Produkte der drei positiven Diagonalen (von links oben nach rechts unten) und der drei negativen Diagonalen (von links unten nach rechts oben) bilden. Die farbliche Markierung der Diagonalen möchte ich mir hier ersparen.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 2 & | & 10 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & | & 1 & 2 \\ 7 & -3 & 2 & | & 7 & -3 \\ \hline 3 & -2 & 2 & | & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -3 & | & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 2 & -3 \end{vmatrix}}{10 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) \cdot 7 + 2 \cdot 1 \cdot (-3) - 7 \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) \cdot 10 - 2 \cdot 1 \cdot (-2)} \\
x &= \frac{40 + 42 - 6 - 28 - 90 + 4}{3 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot (-2)} \\
x &= \frac{-38}{12 + 12 - 24 - 8 - 27 + 16} \\
x &= \frac{-38}{-19} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Die Lösung für y wird entsprechend bestimmt. Da die Nennerdeterminante bei y völlig identisch mit der Nennerdeterminante bei x ist, kann man deren Ergebnis (-19) nicht nur für das Gesamtergebnis übernehmen, sondern sogar schon im Ansatz mit verwenden. Damit ergibt sich für y :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 & | & 3 & 10 \\ 4 & 1 & -3 & | & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & | & 2 & 7 \\ \hline 3 & 10 & 2 & | & 3 & 10 \\ 4 & 1 & -3 & | & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & | & 2 & 7 \end{vmatrix}}{-19} \\
y &= \frac{3 \cdot 1 \cdot 2 + 10 \cdot (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 7 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 7 \cdot (-3) \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 10}{-19} \\
y &= \frac{6 - 60 + 56 - 4 + 63 - 80}{-19} \\
y &= \frac{-19}{-19} \\
y &= 1
\end{aligned}$$

Man könnte nun z natürlich mit dem entsprechenden Ansatz mit Hilfe der Cramerschen Regel bestimmen. Da wir aber bereits x und y bestimmt haben, geht es deutlich einfacher, indem man die bekannten Werte in eine der drei gegebenen Gleichungen einsetzt und nach z auflöst. Ich mache das mit Gleichung (1):

$$\begin{array}{rcl}
3x - 2y + 2z & = & 10 \quad | \text{Werte einsetzen} \\
3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2z & = & 10 \quad | \text{zusammenfassen} \\
4 + 2z & = & 10 \quad | - 4 \\
2z & = & 6 \quad | : 2 \\
z & = & 3
\end{array}$$

5.2 Beispiel 2

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2x + 5y - 3z = 15 \\ (2) \quad & 3x - 5y + 4z = 10 \\ (3) \quad & x + 3y = 8 \end{aligned}$$

Bei diesem Gleichungssystem fällt auf, dass in der dritten Gleichung kein z vorkommt. In den Determinanten muss daher an der entsprechenden Stelle eine 0 eingesetzt werden. Entsprechend bedeutet das x ohne Koeffizienten eine 1 als Koeffizienten, denn es gilt: $x = 1x$. Man tut also so, als ob die dritte Gleichung $1x + 3y + 0z = 8$ lautete. Damit ergibt sich der Ansatz für x :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 5 & -3 \\ 10 & -5 & 4 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}$$

Zum Zweck der besseren Berechenbarkeit schreiben wir wieder im Zähler und auch im Nenner jeweils die erste und zweite Spalte hinter die jeweilige Determinante und rechnen alles aus.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 15 & 5 & -3 & 15 & 5 \\ 10 & -5 & 4 & 10 & -5 \\ 8 & 3 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} \\ x &= \frac{15 \cdot (-5) \cdot 0 + 5 \cdot 4 \cdot 8 + (-3) \cdot 10 \cdot 3 - 8 \cdot (-5) \cdot (-3) - 3 \cdot 4 \cdot 15 - 0 \cdot 10 \cdot 5}{2 \cdot (-5) \cdot 0 + 5 \cdot 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-5) \cdot (-3) - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 5} \\ x &= \frac{0 + 160 - 90 - 120 - 180 - 0}{0 + 20 - 27 - 15 - 24 - 0} \\ x &= \frac{-230}{-46} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Ähnlich, wie beim ersten Beispiel könnten wir jetzt den Ansatz nach der Cramerschen Regel mit y machen. Schaut man sich das Gleichungssystem aber einmal genau an, dann kann man ausnutzen, dass in Gleichung (3) nur x und y vorkommen. Daher ist es sinnvoll, diese Gleichung zu verwenden und sofort den gefundenen Wert $x = 5$ dort einzusetzen. Damit bekommt man sofort y .

$$\begin{aligned} x + 3y &= 8 & | \quad x \text{ durch } 5 \text{ ersetzen} \\ 5 + 3y &= 8 & | \quad -5 \\ 3y &= 3 & | \quad :3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Ebenfalls durch Einsetzen der Ergebnisse in Gleichung (1) oder (2) bekommen wir am bequemsten die noch fehlende Variable z . Natürlich wäre auch hier ein Ansatz mit der Cramerschen Regel möglich, aber anders geht es eben schneller. Ich wähle für die Bestimmung von z die Gleichung (1).

$$\begin{array}{rcl}
 2x + 5y - 3z & = & 15 \quad | \quad x \text{ und } y \text{ ersetzen} \\
 2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 - 3z & = & 15 \quad | \quad \text{zusammenfassen} \\
 15 - 3z & = & 15 \quad | \quad - 15 \\
 -3z & = & 0 \quad | \quad : (-3) \\
 z & = & 0
 \end{array}$$

5.3 Beispiel 3

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad 8x - 17 + 9y = 2z \\
 (2) \quad 2(x + 3y) = 11 - z \\
 (3) \quad 3(z - 3) + 2y = 2x
 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht in der Normalform angegeben, es ist „unsortiert“. So kann man die Cramersche nicht anwenden. Wir müssen es also erst noch in die Normalform bringen. Dazu lösen wir zunächst alle Klammern auf.

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad 8x - 17 + 9y = 2z \quad | \quad + 17 - 2z \\
 (2) \quad 2x + 6y = 11 - z \quad | \quad + z \\
 (3) \quad 3z - 9 + 2y = 2x \quad | \quad + 9 - 2x
 \end{array}$$

Im nächsten Schritt kommen alle absoluten Terme (ohne eine Variable) auf die rechte Seite und alle Terme mit einer Variablen auf die linke.

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad 8x + 9y - 2z = 17 \\
 (2) \quad 2x + 6y + z = 11 \\
 (3) \quad 3z + 2y - 2x = 9
 \end{array}$$

Zum Schluss sortieren wir alle Terme mit einer Variablen, dass die Variablen nach dem Alphabet sortiert da stehen. Hier ist das bei der ersten und der zweiten Gleichung zufälligerweise schon der Fall. Also muss nur noch die dritte Gleichung umsortiert werden.

Ein kleiner Tipp dazu: Es ist hilfreich, wenn man etwas Sorgfalt beim Schreiben aufbringt und die Gleichungen so aufschreibt, dass alle x genau untereinander stehen. Mit y und z macht man es natürlich genauso.

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad 8x + 9y - 2z = 17 \\
 (2) \quad 2x + 6y + z = 11 \\
 (3) \quad -2x + 2y + 3z = 9
 \end{array}$$

Jetzt ist es endlich möglich, die Cramersche Regel anzuwenden. Wie gewohnt, bestimmen wir zunächst x .

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} 17 & 9 & -2 & | & 17 & 9 \\ 11 & 6 & 1 & | & 11 & 6 \\ 9 & 2 & 3 & | & 9 & 2 \\ \hline 8 & 9 & -2 & | & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & | & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 3 & | & -2 & 2 \end{vmatrix}}{17 \cdot 6 \cdot 3 + 9 \cdot 1 \cdot 9 + (-2) \cdot 11 \cdot 2 - 9 \cdot 6 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 17 - 3 \cdot 11 \cdot 9} \\
 x &= \frac{8 \cdot 6 \cdot 3 + 9 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 \cdot 2 - (-2) \cdot 6 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 8 - 3 \cdot 2 \cdot 9}{306 + 81 - 44 + 108 - 34 - 297} \\
 x &= \frac{144 - 18 - 8 - 24 - 16 - 54}{120} \\
 x &= \frac{120}{24} \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Zur Abwechslung bestimmen wir als zweite Variable einmal z . Natürlich spricht nichts dagegen, wenn man – wie gewohnt – zunächst y bestimmt. Wie schon im ersten Beispiel verwenden wir sofort das Ergebnis, das wir für die Nennerdeterminante bei der Berechnung von x mit 24 erhalten haben.

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & 9 & 17 & | & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 11 & | & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 9 & | & -2 & 2 \\ \hline 8 & 9 & 17 & | & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 11 & | & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 9 & | & -2 & 2 \end{vmatrix}}{24} \\
 z &= \frac{8 \cdot 6 \cdot 9 + 9 \cdot 11 \cdot (-2) + 17 \cdot 2 \cdot 2 - (-2) \cdot 6 \cdot 17 - 2 \cdot 11 \cdot 8 - 9 \cdot 2 \cdot 9}{24} \\
 z &= \frac{432 - 198 + 68 + 204 - 176 - 162}{24} \\
 z &= \frac{168}{24} \\
 z &= 7
 \end{aligned}$$

Mit x und z können wir nun aus einer beliebigen Gleichung y bestimmen. Ich suche mir dafür Gleichung (3) aus, weil die relativ einfach ist.

$$\begin{array}{rcl}
 -2x + 2y + 3z & = & 9 \quad | \text{ } x \text{ und } z \text{ ersetzen} \\
 -2 \cdot 5 + 2y + 3 \cdot 7 & = & 9 \quad | \text{ zusammenfassen} \\
 -10 + 2y + 21 & = & 9 \quad | \text{ zusammenfassen} \\
 2y + 11 & = & 9 \quad | - 11 \\
 2y & = & -2 \quad | : 2 \\
 y & = & -1
 \end{array}$$

6 Nachtrag

Übungsaufgaben, die mit der Cramerschen Regel gelöst werden können, sind zusammen mit kompletten Musterlösungen hier zu finden:

<https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/linglsys.pdf>

Anmerkung: Es gibt eine schöne interaktive Webseite, auf der man sich die Lösung eines beliebigen Lineargleichungssystems mit allen Zwischenschritten anzeigen lassen kann:

<https://matrixcalc.org/de/slu.html>