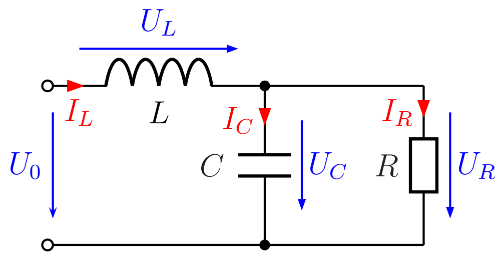
Die Boucherot-Schaltung – was macht sie?

Für die Boucherot-Schaltung gilt folgende Bedingung:

$$X_L = X_C = X$$

Damit ist gemeint, dass die Beträge von $\underline{X}_L$ und $\underline{X}_C$ gleich sind, und dass man daher beide der Einfachheit halber mit X bezeichnen kann.[1]



Die Schaltung wird an eine Spannung U_0 angeschlossen. Gesucht ist der Strom I_R.

Um herauszufinden, welches besondere Merkmal die Boucherot-Schaltung hat, leiten wir aus diesen Bedingungen eine Formel ab, die den Strom I_R in Abhängigkeit von U_0, X und R angibt.

Zunächst schreibe ich die Komplexen Größen auf. Die Spannung lege ich willkürlich als Bezugsgröße reell fest:

$$\underline{U}_0 = U_0$$

Der Ohmsche Widerstand ist von Natur aus eine reelle Größe:

$$\underline{R} = R$$

Die Widerstände von L und C sind *Blindwiderstände*, also imaginär:

$$\begin{array}{rclcrcl} X_L & = & X & \Rightarrow & \underline{X}_L & = & jX \\ X_C & = & X & \Rightarrow & \underline{X}_C & = & -jX \end{array}$$

Die Parallelschaltung aus $\underline{X}_C$ und $\underline{R}$ nenne ich $\underline{Z}_{RC}$. Dieser Wert wird bestimmt:

$$\begin{array}{rcl} \underline{Z}_{RC} & = & \dfrac{\underline{X}_C \cdot \underline{R}}{\underline{X}_C + \underline{R}} \\ \underline{Z}_{RC} & = & \dfrac{-jX \cdot R}{-jX + R} \end{array}$$

[1]Einzelheiten zur Wechselstromtechnik siehe hier:
https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsels.pdf

Nun kann $\underline{Z}_{RC}$ mit $\underline{X}_L$ zum Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \underline{X}_L + \underline{Z}_{RC} \\
&= jX + \frac{-jX \cdot R}{-jX + R} && \mid \text{1. Term auf Bruch erweitern} \\
&= \frac{jX \cdot (-jX + R)}{-jX + R} + \frac{-jXR}{-jX + R} \\
&= \frac{-j^2X^2 + jXR}{-jX + R} + \frac{-jXR}{-jX + R} && \mid j^2 \text{ durch } -1 \text{ ersetzen} \\
&= \frac{X^2 + jXR - jXR}{-jX + R} \\
\underline{Z} &= \frac{X^2}{-jX + R}
\end{aligned}$$

Mit diesem Gesamtwiderstand und der Spannung $\underline{U}_0$ kann über das Ohmsche Gesetz der Strom $\underline{I}_L$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
&= \frac{U_0}{\frac{X^2}{-jX+R}} \\
&= \frac{U_0 \cdot (-jX + R)}{X^2}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Stromes und des Ersatzwiderstandes $\underline{Z}_{RC}$ bestimme ich die Spannung $\underline{U}_R$ über das Ohmsche Gesetz.

$$\begin{aligned}
\underline{U}_R &= \underline{Z}_{RC} \cdot \underline{I}_L \\
&= \frac{-jX \cdot R}{-jX + R} \cdot \frac{U_0 \cdot (-jX + R)}{X^2} \\
\underline{U}_R &= \frac{-jX \cdot R \cdot U_0 \cdot (-jX + R)}{(-jX + R) \cdot X^2} && \mid \text{Kürzen} \\
\underline{U}_R &= \frac{-jR \cdot U_0}{X}
\end{aligned}$$

Jetzt kann der gesuchte Strom $\underline{I}_R$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{R}} \\
&= \frac{\frac{-jR \cdot U_0}{X}}{R} \\
&= \frac{-jR \cdot U_0}{X \cdot R} && \mid \text{Kürzen} \\
\underline{I}_R &= \frac{-jU_0}{X}
\end{aligned}$$

Da der Betrag des Stromes I gesucht ist, wird dieser noch bestimmt. Dazu fällt einfach nur das Minuszeichen und das j weg.

$$\boxed{I_R = \frac{U_0}{X}}$$

Was bedeutet das Ergebnis?

Der Strom im Widerstand ist nur von $\mathbf{U_0}$ und $\mathbf{X}$ abhängig, nicht aber von $\mathbf{R}$!